Références :
Calcul différentiel, Avez

Théo (Extrema liés)**.**
Soit $f, g_1, ..., g_k : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert). Posons

$$M = \{\omega \in U : g_1(\omega) = ... = g_k(\omega) = 0\}.$$

Si la restriction de f à M admet un extremum local en $m \in X$ et si la famille $(D_x g_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ est linéairement indépendante pour tout $x \in M$, alors il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$$

Les $(\lambda_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ sont appelés les ***multiplicateurs de Lagrange****.*

Lemme. Soit $v, u_1, ..., u_k \in (\mathbb{R}^n)'$ (dual de $\mathbb{R}^n$). Si $u_1, ..., u_k$ est libre et si

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} \subset \mathrm{Ker} v. (*)$$

Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

Démonstration. Posons

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k) \subset (\mathbb{R}^n)' \text{ et } D = \mathrm{Vect}(v)$$

On a

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1,k]\!] u_i(x)\} \\ &= F^\circ \end{aligned}$$

De même, $\mathrm{Ker}(v) = D^\circ$.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow F^\circ \subset D^\circ \\ &\Leftrightarrow (D^\circ)^\perp \subset (F^\circ)^\perp \\ &\Leftrightarrow D \subset F \end{aligned}$$

Or $v \in D \subset F$. Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}$ tel que $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$. □

Démonstration.

- Montrons que M est une sous-variété.
  Si $g = (g_1, ..., g_k)$, alors $M = g^{-1}(\{O_{\mathbb{R}^k}\})$.
  M est une sous-variété si et seulement si pour tout $x \in M$, $D_x g$ est surjective. Or, pour tout $x \in M$,

$$D_x g = \begin{pmatrix} D_x g_1 \\ \vdots \\ D_x g_k \end{pmatrix}$$

  Comme $(D_x g_1, ..., D_x g_k)$ est libre, pour tout $x \in M$, on obtient que $D_x g$ est surjective.

- Montrons que $T_m(M) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(D_m g_i) = T$.
  $T_m(M)$ est un espace vectoriel de dimension $n - k$.
  On a $\mathrm{Ker}(D_m g_1, ..., D_m g_k) = T$ et $\mathrm{Im}(D_m g_1, ..., D_m g_k) = \mathbb{R}^k$ (car $D_m g$ est surjective). Ainsi, par le théorème du rang, $\dim(T) = n - k$.
  Montrons que $T_m(M) \subset T$.
  Soit $v \in T_m(M)$. Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une application différentiable $\gamma : I \to M$ tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.
  Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $t \in I$, on a $g_i(\gamma(t)) = 0$ (car $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in I$). Ainsi, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $t \in I$, on a $D_{\gamma(t)} g_i(\gamma'(t)) = 0$. On évalue maintenant en $t = 0$ et on obtient pour tout $i \in [\![1,k]\!]$,

$$D_m g_i(v) = D_{\gamma(0)} g_i(\gamma'(0)) = 0.$$

  On obtient donc $T_m(M) = T$.

- Montrons que $T_m(M) \subset \mathrm{Ker}(D_m f)$.
  Soit $v \in T_m(M)$. Alors, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une application différentiable $\gamma : I \to M$ tel que $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.
  On a $f_{|M} \circ \gamma(t) = f \circ \gamma(t)$ pour tout $t \in I$ et cette fonction admet en extremum pour $t = 0$. On a donc que $t \mapsto D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$ s'annule en 0 car elle y admet un extremum. Cette dernière

affirmation se traduit par $D_m f(v) = 0$ ce qui implique que $v \in \mathrm{Ker}(D_m f)$. On conclut par le lemme.

□

App. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$. On a donc $< u(x), y >=< x, u(y) >$ pour tout $x, y \in E$. Alors E possède une base de vecteurs propres de u.

Démonstration. La fonction

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & < u(x), x > \end{array}$$

est différentiable. Définissons

$$\begin{array}{rcl} g : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ||x||^2 - 1 \end{array}$$

Posons $M = \{x \in E, g(x) = 0\} = S^1$. Comme S^1 est compact, $f_{|S^1}$ admet un maximum en e_1. On veut que, pour tout $x \in S^1$, $D_x g \neq 0$ (pour que la "famille" soit libre).
Soit $x \in S^1$ et $h \in E$. On a

$$\begin{array}{rcl} g(x+h) - g(x) & = & ||x+h||^2 - 1 - ||x||^2 + 1 \\ & = & < x+h, x+h > -||x||^2 \\ & = & ||x||^2 + 2 < x, h > +o(||h||) - ||x||^2 \\ & = & 2 < x, h > +o(||h||) \end{array}$$

Ainsi, $D_x g(h) = 2 < x, h >$ et donc cette application est non identiquement nulle (si on prend, par exemple, $h = x$). On applique le théorème des extrema liés. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $D_{e_1} f = c D_{e_1} g$. On cherche donc à calculer $D_{e_1} f$. Pour ce faire, on remarque que $f = \phi \circ \psi$ avec

$$\begin{array}{rcl} \psi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & < u(x), x > \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & < x, y > \end{array}$$

En utilisant la formule sur la différentielle d'une fonction composée, on obtient

$$\begin{array}{rcl} D_{e_1} f(h) & = & D_{\psi(e_1)}\phi . D_{e_1}\psi . h \\ & = & D_{<u(e_1), e_1>}\phi . (< u(h), h >) \\ & = & < u(e_1), h > + < u(h), e_1 > \\ & = & 2 < u(e_1), h > \text{ car } u \text{ est symétrique} \end{array}$$

En utilisant l'égalité qui sort des extrema liés, on obtient, pour tout $h \in E$,

$$2 < u(e_1), h >= 2c < e_1, h >$$

et donc $u(e_1) = ce_1$.
De plus, on a

$$f(e_1) =< u(e_1), e_1 >=< ce_1, e_1 >= c||e_1||^2 = c.$$

Posons $F = e_1^{\perp}$. Montrons que F est stable par u.
Soit $y \in F$. Montrons que $u(y) \in F$.

$$\begin{array}{rcl} < u(y), e_1 > & = & < y, u(e_1) > \\ & = & < y, ce_1 > \\ & = & c < y, e_1 > \\ & = & 0 \text{ car } y \in F \end{array}$$

Ainsi, F est stable par u. De plus, $u_{|F}$ est un endomorphisme symétrique et $\dim(F) = \dim(E) - 1$. En itérant ce raisonnement, on obtient donc le résultat. □

<u>Leçons possibles</u> : 159 - 214 - 215 - 219